$\boxed{1}$

$\sqrt{1-x}=n$ とおくと，$1-x=n^2\ (n \geq 0)$　$\therefore x=1-n^2\ (n \geq 0)$　・・・①

①より与式は $\left|1-n^2-2y\right|=y+n+1\quad (n \geq 0)$ と表せる。　$\therefore 1-n^2-2y=\pm(y+n+1)\ (n \geq 0)$

また，$\left|1-n^2-2y\right|=y+n+1 \geq 0$ より，$y \geq -n-1$　・・・②

（ｉ）$1-n^2-2y=y+n+1\quad (n \geq 0)$ のとき

$3y=-n(n+1)\quad \therefore y=-\dfrac{n(n+1)}{3}$

これと②より，$-\dfrac{n(n+1)}{3} \geq -n-1\quad \therefore n(n+1) \leq 3(n+1)\quad \therefore (n+1)(n-3) \leq 0$

$\therefore 0 \leq n \leq 3$（$\because n \geq 0$）

よって，y が整数であるためには，$n=0,2,3$ であればよく，

このとき，①と③より，$(x,y)=(1,0),(-3,-2),(-8,-4)$

（ⅱ）$1-n^2-2y=-(y+n+1)\quad (n \geq 0)$ のとき

$y=-n^2+n+2$

これと②より，$-n^2+n+2 \geq -n-1\quad \therefore (n+1)(n-3) \leq 0\quad \therefore 0 \leq n \leq 3$（$\because n \geq 0$）

よって，$n=0,1,2,3$ であればよく，

このとき，①，③より，$(x,y)=(1,2),(0,2),(-3,0),(-8,-4)$

（ｉ），（ⅱ）より，

$(x,y)=(-8,-4),(-3,-2),(-3,0),(0,2),(1,0),(1,2)$　・・・(答)

$\boxed{2}$

(1)

与式より， $X_1X_2 - X_1 - X_2 = 0$ $\therefore (X_1 - 1)(X_2 - 1) = 1$ $\therefore (X_1 - 1, X_2 - 1) = (-1, -1), (1,1)$

よって， $(X_1, X_2) = (0,0), (2,2)$

$(X_1, X_2) = (0,0)$ となる確率$= \dfrac{1}{10^2}$， $(X_1, X_2) = (2,2)$ となる確率$= \dfrac{1}{10^2}$ より，

求める確率は， $\dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{50}$ ・・・(答)

別解

$X_2 = X_1 + k$ とおくと，与式より， $X_1 + (X_1 + k) = X_1(X_1 + k)$ $\therefore k(X_1 - 1) = -X_1{}^2 + 2X_1$

$k(X_1 - 1) = -X_1{}^2 + 2X_1$ について， $X_1 = 1$ とすると，左辺が 0，右辺が 1 となり不適。

よって， $X_1 - 1 \neq 0$ より， $k = \dfrac{-X_1{}^2 + 2X_1}{X_1 - 1}$ $\therefore k = -X_1 + 1 + \dfrac{1}{X_1 - 1}$

k は整数だから， $X_1 - 1 = \pm 1$ $\therefore (X_1, k) = (2,0), (0,0)$ よって， $(X_1, X_2) = (0,0), (2,2)$

(2)

$0 \leq X_1 + X_2 + X_3 \leq 27$ より，

$X_1 + X_2 + X_3 = X_1X_2X_3$ であるための必要条件は $0 \leq X_1X_2X_3 \leq 27$

ここで，解の組み合わせを求める目的で $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq X_3 \leq 9$ の場合で考える。

すると， $0 \leq X_1{}^3 \leq 27$ より， $0 \leq X_1 \leq 3$ $\therefore X_1 = 0,1,2,3$

$X_1 = 0$ のとき

$0 + X_2 + X_3 = 0$ より， $X_2 = X_3 = 0$ $\therefore (X_1, X_2, X_3) = (0,0,0)$

$X_1 = 1$ のとき

$1 + X_2 + X_3 = X_2X_3$ より， $(X_2 - 1)(X_3 - 1) = 2$

これと $0 \leq X_2 - 1 \leq X_3 - 1$ $(\because 1 \leq X_2 \leq X_3)$ より， $(X_2 - 1, X_3 - 1) = (1,2)$ $\therefore (X_2, X_3) = (2,3)$

よって， $(X_1, X_2, X_3) = (1,2,3)$

$X_1 = 2$ のとき

$2 + X_2 + X_3 = 2X_2X_3$ より， $4 + 2X_2 + 2X_3 = 2^2 X_2X_3$ $\therefore (2X_2 - 1)(2X_3 - 1) = 5$

ところが， $3 \leq 2X_2 - 1 \leq 2X_3 - 1$ $(\because 2 \leq X_2 \leq X_3)$ より，

$(2X_2 - 1)(2X_3 - 1) = 5$ を満たす解 X_2, X_3 は存在しない。

$X_1 = 3$ のとき

$3 + X_2 + X_3 = 3X_2X_3$ より， $9 + 3X_2 + 3X_3 = 3^2 X_2X_3$ $\therefore (3X_2 - 1)(3X_3 - 1) = 10$

ところが， $8 \leq 3X_2 - 1 \leq 3X_3 - 1$ $(\because 3 \leq X_2 \leq X_3)$ より，

$(3X_2 - 1)(3X_3 - 1) = 10$ を満たす解 X_2, X_3 は存在しない。

以上より，解の組は， $(0,0,0)$， $(1,2,3)$

よって，求める確率は， $\dfrac{1}{10^3} + 6 \times \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{7}{1000}$ ・・・(答)

(3)

$0 \leq X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 36$ より，

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = X_1X_2X_3X_4$ であるための必要条件は $0 \leq X_1X_2X_3X_4 \leq 36$

ここで，解の組み合わせを求める目的で $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq X_3 \leq X_4 \leq 9$ の場合で考える。

すると，$0 \leq {X_1}^4 \leq 36$ より，$0 \leq X_1 \leq 2$

$X_1 = 0$ のとき

$0 + X_2 + X_3 + X_4 = 0$ より，$X_2 = X_3 = X_4 = 0 \quad \therefore (X_1, X_2, X_3, X_4) = (0,0,0,0)$

$X_1 = 1$ のとき

$1 + X_2 + X_3 + X_4 = X_2X_3X_4$，$4 \leq 1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 28 \ (\because 1 \leq X_2 \leq X_3 \leq X_4)$ より，

$1 \leq {X_2}^3 \leq 28 \quad \therefore X_2 = 1,2,3$

$X_2 = 1$ のとき

$1 + 1 + X_3 + X_4 = X_3X_4 \quad \therefore (X_3 - 1)(X_4 - 1) = 3$

これと $0 \leq X_3 - 1 \leq X_4 - 1 \ (\because 1 \leq X_3 \leq X_4)$ より，$(X_3 - 1, X_4 - 1) = (1,3)$

$\therefore (X_3, X_4) = (2,4) \quad \therefore (X_1, X_2, X_3, X_4) = (1,1,2,4)$

$X_2 = 2$ のとき

$1 + 2 + X_3 + X_4 = 2X_3X_4 \quad \therefore 6 + 2X_3 + 2X_4 = 2^2 X_3X_4 \quad \therefore (2X_3 - 1)(2X_4 - 1) = 7$

ところが，$3 \leq 2X_3 - 1 \leq 2X_4 - 1 \ (\because 2 \leq X_3 \leq X_4)$ より，

$(2X_3 - 1)(2X_4 - 1) = 7$ を満たす解 X_3, X_4 は存在しない。

$X_2 = 3$ のとき

$1 + 3 + X_3 + X_4 = 3X_3X_4 \quad \therefore 12 + 3X_3 + 3X_4 = 3^2 X_3X_4 \quad \therefore (3X_3 - 1)(3X_4 - 1) = 13$

ところが，$8 \leq 3X_3 - 1 \leq 3X_4 - 1 \ (\because 3 \leq X_3 \leq X_4)$ より，

$(3X_3 - 1)(3X_4 - 1) = 13$ を満たす解 X_3, X_4 は存在しない。

$X_1 = 2$ のとき

$2 + X_2 + X_3 + X_4 = 2X_2X_3X_4$，$8 \leq 2 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 29 \ (\because 2 \leq X_2 \leq X_3 \leq X_4)$ より，

$16 \leq 2{X_2}^3 \leq 29 \quad \therefore X_2 = 2$

$\therefore 2 + 2 + X_3 + X_4 = 4X_3X_4 \quad \therefore 16 + 4X_3 + 4X_4 = 4^2 X_3X_4 \quad \therefore (4X_3 - 1)(4X_4 - 1) = 17$

ところが，$7 \leq 4X_3 - 1 \leq 4X_4 - 1 \ (\because 2 \leq X_3 \leq X_4)$ より，

$(4X_3 - 1)(4X_4 - 1) = 17$ を満たす解 X_3, X_4 は存在しない。

以上より，解の組は，$(0,0,0,0)$，$(1,1,2,4)$

よって，求める確率は，$\dfrac{1}{10^4} + \dfrac{4!}{2!} \times \dfrac{1}{10^4} = \dfrac{13}{10000}$ ・・・(答)

$\boxed{3}$

条件より，$\mathrm{P}(-\sin 4\pi t, \cos 4\pi t)$，$\mathrm{Q}(1+3\cos 2\pi t, 3\sin 2\pi t)$

よって，

$$\begin{aligned}
\mathrm{PQ}^2 &= (3\cos 2\pi t + 1 + \sin 4\pi t)^2 + (3\sin 2\pi t - \cos 4\pi t)^2 \\
&= 9\cos^2 2\pi t + 1 + \sin^2 4\pi t + 6\cos 2\pi t + 2\sin 4\pi t + 6\cos 2\pi t \sin 4\pi t \\
&\qquad + 9\sin^2 2\pi t + \cos^2 4\pi t - 6\sin 2\pi t \cos 4\pi t \\
&= 11 + 6(\cos 2\pi t \sin 4\pi t - \sin 2\pi t \cos 4\pi t) + 6\cos 2\pi t + 2\sin 4\pi t \\
&= 11 + 6\sin(4\pi t - 2\pi t) + 6\cos 2\pi t + 2\sin 4\pi t \\
&= 11 + 6\sin 2\pi t + 6\cos 2\pi t + 2\sin 4\pi t \\
&= 11 + 6\sin 2\pi t + 6\cos 2\pi t + 4\sin 2\pi t \cos 2\pi t
\end{aligned}$$

ここで，$\mathrm{PQ}^2 = f(t) = 4\sin 2\pi t \cos 2\pi t + 6\sin 2\pi t + 6\cos 2\pi t + 1$ とおくと，

$f(t)$ の周期は 1 秒であるから，

PQ^2 の最大値と最小値を $f(t)$ $(0 \leq t < 1)$ から求めることにする。

$$\begin{aligned}
f'(t) &= 8\pi\cos^2 2\pi t - 8\pi\sin^2 2\pi t + 12\pi\cos 2\pi t - 12\pi\sin 2\pi t \\
&= 4\pi\{2(\cos 2\pi t - \sin 2\pi t)(\cos 2\pi t + \sin 2\pi t) + 3(\cos 2\pi t - \sin 2\pi t)\} \\
&= 4\pi(\cos 2\pi t - \sin 2\pi t)\{2(\cos 2\pi t + \sin 2\pi t) + 3\} \\
&= 4\pi\left\{-\sqrt{2}\sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right)\right\}\left\{2\sqrt{2}\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 3\right\} \\
&= -4\sqrt{2}\pi\sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right)\left\{2\sqrt{2}\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 3\right\}
\end{aligned}$$

$2\sqrt{2}\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 3 > 0$，$0 \leq t < 1$ より，

$2\pi t - \frac{\pi}{4} = 0, \pi$ のとき，すなわち $t = \frac{1}{8}, \frac{5}{8}$ のとき $f'(t) = 0$

よって，増減表は次のようになる。

t	0		$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{8}$		(1)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	17	$\uparrow$	$13+6\sqrt{2}$	$\downarrow$	$13-6\sqrt{2}$	$\uparrow$	(17)

よって，$t = \frac{1}{8}$ のとき最大値 $13+6\sqrt{2}$，$t = \frac{5}{8}$ のとき最小値 $13-6\sqrt{2}$ をとる。

これを一般化すると $f(t)$ の周期が 1 であることから，n を負でない整数とすると，

$\mathrm{PQ}^2 = f(t)$ は，

$t = \frac{1}{8} + n$ のとき最大値 $13+6\sqrt{3}$ をとり，

P，Q の座標はそれぞれ，

$$P\left(-\sin\left\{4\pi\left(\frac{1}{8}+n\right)\right\},\cos\left\{4\pi\left(\frac{1}{8}+n\right)\right\}\right)=(-1,0)$$

$$Q\left(1+3\cos\left\{2\pi\left(\frac{1}{8}+n\right)\right\},3\sin\left\{2\pi\left(\frac{1}{8}+n\right)\right\}\right)=\left(1+\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$t=\frac{5}{8}+n$ のとき最小値 $13-6\sqrt{2}$ をとり，

P，Q の座標はそれぞれ，

$$P\left(-\sin\left\{4\pi\left(\frac{5}{8}+n\right)\right\},\cos\left\{4\pi\left(\frac{5}{8}+n\right)\right\}\right)=(-1,0)$$

$$Q\left(1+3\cos\left\{2\pi\left(\frac{5}{8}+n\right)\right\},3\sin\left\{2\pi\left(\frac{5}{8}+n\right)\right\}\right)=\left(1-\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

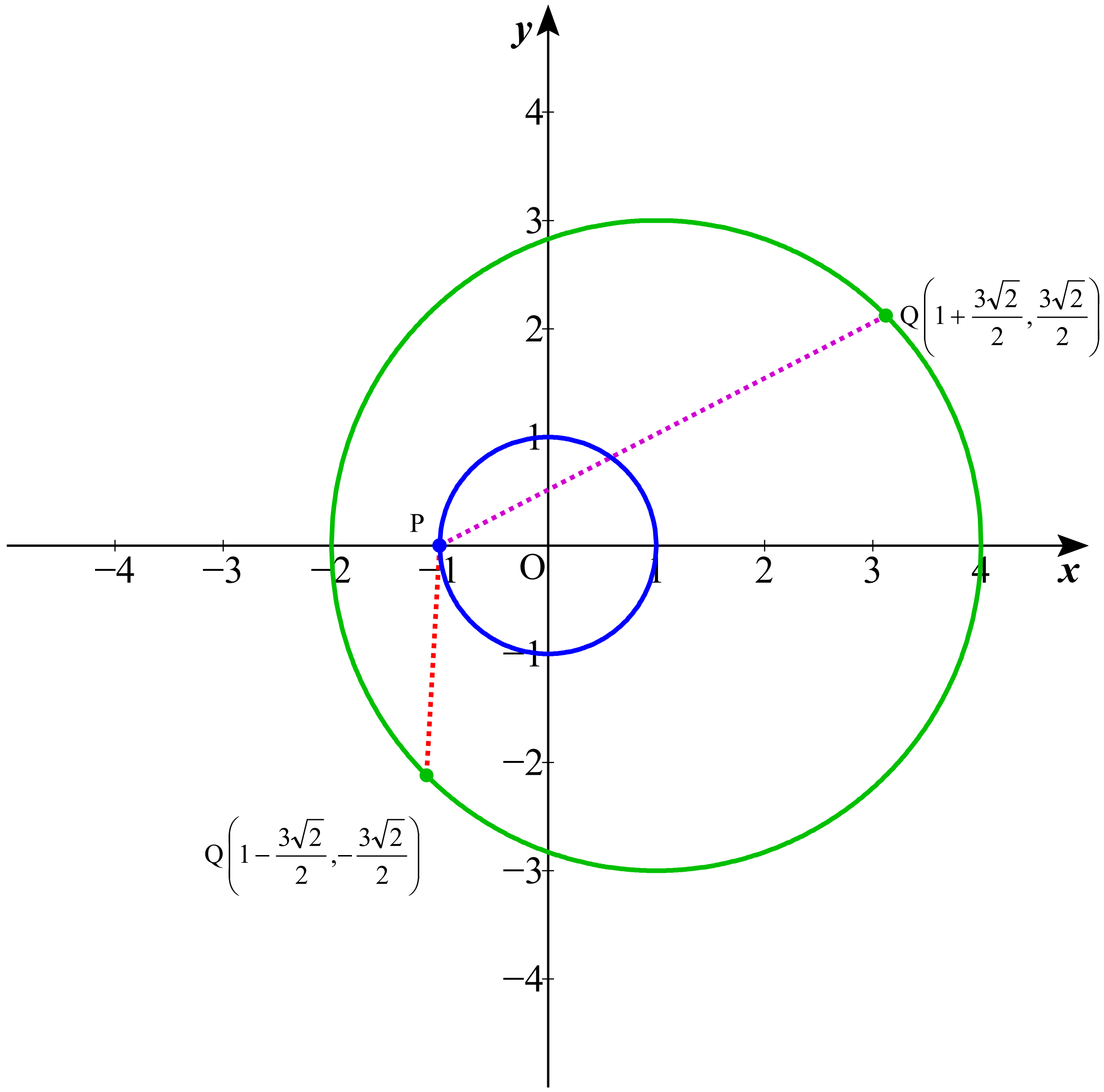
以上をまとめると，

PQ^2 は，

$P(-1,0)$，$Q\left(1+\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ のとき　最大値 $13+6\sqrt{2}$

$P(-1,0)$，$Q\left(1-\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ のとき　最小値 $13-6\sqrt{2}$

をとる。　・・・(答)


y
4
3
2
1
P
−4
−3
−2
−1
O
1
2
3
4
x
−1
−2
−3
−4
$Q\left(1+\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$
$Q\left(1-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

$\boxed{4}$

(1)

$$y' = \frac{\left(\sin^2 x\right)' \cdot x - \left(\sin^2 x\right) \cdot x'}{x^2}$$
$$= \frac{2x\sin x\cos x - \sin^2 x}{x^2}$$
$$= \frac{\sin 2x}{x} - \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

よって，$y = \dfrac{\sin^2 x}{x}$ の導関数は，$y' = \dfrac{\sin 2x}{x} - \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$ ・・・(答)

(2)

立体の体積を V とすると，$V = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$

これと $y' = \dfrac{\sin 2x}{x} - \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$，すなわち $\left(\dfrac{\sin^2 x}{x}\right)' = \dfrac{\sin 2x}{x} - \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$ より，

$$V = \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \left\{\frac{\sin 2x}{x} - \left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)'\right\} dx$$
$$= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\sin 2x}{x}dx - \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)' dx$$
$$= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\sin 2x}{x}dx - \pi\left[\frac{\sin^2 x}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\sin 2x}{x}dx + 2 \quad \cdots ①$$

$$a_1 = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$$
$$= -\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

ここで，$x = 2t$ とおくと，$dx = 2dt$，$x = 2\pi \to t = \pi$，$x = \pi \to t = \dfrac{\pi}{2}$ より，$a_1 = -\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin 2t}{t} dt$

よって，$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin 2t}{t} dt = -a_1$ ・・・②

$$a_2=\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx$$
$$=\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{x}dx$$

a_1 の場合と同様に，$x=2t$ とおくと，$a_2=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\sin 2t}{t}dt$

よって，$\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\sin 2t}{t}dt=a_2$　・・・③

$$a_3=\int_{3\pi}^{4\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx$$
$$=-\int_{3\pi}^{4\pi}\frac{\sin x}{x}dx$$

a_1 の場合と同様に，$x=2t$ とおくと，$a_3=-\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\frac{\sin 2t}{t}dt$

よって，$\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\frac{\sin 2t}{t}dt=-a_3$　・・・④

②，③，④より，

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\frac{\sin 2t}{t}dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin 2t}{t}dt+\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\sin 2t}{t}dt+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\frac{\sin 2t}{t}dt$$
$$=-a_1+a_2+(-a_3)$$
$$=-a_1+a_2-a_3$$

一方，$\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\frac{\sin 2x}{x}dx$ の x を t とおくと，$\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\frac{\sin 2x}{x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\frac{\sin 2t}{t}dt$

よって，$\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\frac{\sin 2x}{x}dx=-a_1+a_2-a_3$　・・・⑤

①，⑤より，

$V=\pi(-a_1+a_2-a_3)+2$　・・・(答)